

## İKİZ DAİRESEL DOLGU İÇEREN ÖNGERİLMELİ ŞERİT-PLAĞIN EĞİLMESİNE KENDİ AĞIRLIĞININ ETKİSİ

Ülkü Babuşcu Yeşil<sup>1</sup>, Nazmiye Yahnioğlu<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul

### ABSTRACT

This paper investigates the effect of own weight on the static analysis of bending of a pre-stretched composite plate-strip containing twin circular inclusions made from the same materials and whose centers on a line parallel to the free surface. The effects of body forces (weight) and surface forces (pre-stretching load) on the plate-strip with inclusions is considered together as the initial stresses determined within the linear theory of elasticity. The effects of these initial stresses on the analyses of stress concentration around the inclusions within a plate-strip under additional bending load are investigated in the framework of the Three-Dimensional Linearized Theory of Elasticity (TDLTE) under the plane strain state. The solutions of the considered boundary value problems are solved numerically by using the Finite Elements Method. This paper shows that the influence of the plate's own weight has an important role on the stress state around the circular twin inclusions within a plate-strip under bending.

### ÖZET

Bu çalışmada, merkezleri serbest yüzeye paralel bir doğrultu üzerinde bulunan aynı malzemeden yapılmış dairesel ikiz dolgu içeren öngerilmeli kompozit şerit-plağın eğilmesine, plağın kendi ağırlığının etkisi incelenmektedir. Hacimsel kuvvetler (ağırlık) ve yüzeysel kuvvetlerin (öngerilme yüklemesi) dolgu içeren şerit-plağa birlikte etkisi Lineer Elastisite Teorisi ile belirlenen öngerilmeler olarak düşünülmüştür. İlave yükleme altında şerit-plağın dolgular civarındaki gerilme yığılmalarına öngerilmelerin etkisi düzlem şekil değiştirme durumunda Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi (LEÜBET) çerçevesinde incelenmiştir. Ele alınan sınır değer problemlerinin çözümleri Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla sayısal olarak yapılmıştır. Bu çalışma, yapısında dairesel ikiz dolgu bulunan öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumunda, plağın içerdiği dolgular civarında oluşan gerilme durumuna plağın kendi ağırlığının önemli etkisi olduğunu göstermiştir.

### GİRİŞ

Dış yükler altındaki yapı elemanlarının analizinde çoğu zaman bu yapı elemanının kendi ağırlığının ele alınan dış yükün büyüklüğüne göre küçük kaldığı, dolayısıyla sonuca az etki gösterdiği ve işlemleri zorlaştırdığı için göz önüne alınmaz. Ancak, yapının ağırlığı bazı durumlarda belirleyici olabilmektedir. Bu nedenle göz önüne alınmasının gerekliliği ortaya çıkabilmektedir. Çünkü yapıların kendi ağırlığı ihmal edildiğinde hafif ve ağır yapılar eşitlenmiş olur ve güvenilir yapısal tasarım elde edilmesini engellemektedir. Daha güvenilir bir yapısal tasarım elde edebilmek için yapıların kendi ağırlıkları dikkate alınmalıdır. Bu alanda literatürde ancak yaklaşık teoriler çerçevesinde ve süreksizlik içermeyen yapı elemanları için çalışmalar yapılmıştır. İlk olarak Takabatake ([1,2]) elastik kirişlerin ve plakların statik problemlerinde kendi ağırlıklarının etkilerini incelemiştir ve basit mesnetli kirişlerin kapalı formda yaklaşık bir çözümünü önermiştir. Zhou tarafından kendi

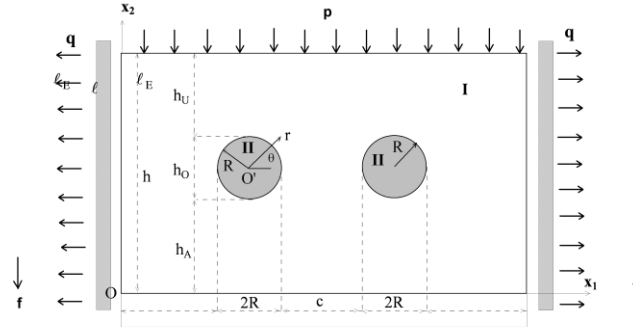
ağırlıklarının etkisi göz önünde bulundurarak süreksizlik içermeyen plaklar için sonlu elemanlar yöntemi geliştirmiştir [3]. [4]'te dairesel delik içeren öngerilmeli eğilme etkisindeki şerit-plağın kendi ağırlığının statik analizine etkisi incelenmiştir.

Bu çalışmada, karşılıklı kenarlarından düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, yapısında merkezleri serbest yüzeye paralel bir doğrultu üzerinde bulunan aynı malzemeden yapılmış dairesel ikiz dolgu bulunan öngerilmeli kompozit şerit-levhanın üst yüzeyine etki eden düzgün yayılı yük etkisi altında eğilmesi durumunda, dolgular etrafında oluşan gerilme yayılımına şerit-plağın kendi ağırlığının etkisi, LEÜBET çerçevesinde modellenerek incelenmiştir. Belirtilen problemler literatürde ancak yaklaşık teoriler çerçevesinde ve dolgu içermeyen yapı elemanları için yapılmıştır.

### ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Ele alınan problemin çözümü iki aşamada belirlenecektir. Birinci aşamada yapıda karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı normal dış kuvvet ve şerit-plağın kendi ağırlığının etkileri süperpozisyon ilkesi yardımıyla, lineer Elastisite Teorisi yardımıyla belirlenecektir. Bu aşamada belirlenen gerilmeler, esas yükleme yapılmadan önce ele alınan şerit-plağın yapısında var olduğu farz edilen öngerilmeler olarak nitelendirilecektir. İkinci aşamada, ele alınan kalın plağın üst yüzeyine etki eden düzgün yayılı yük (esas yükleme) etkisinde şerit-plaktaki dolgular civarında oluşan gerilme yayılımına, birinci aşamada belirlenen öngerilmelerin etkisi incelenecektir. Belirtelim ki, ele alınan sınır değer problemine ait aşağıda verilen matematiksel modellemeye; birinci aşamaya ait büyüklükler üst indis (0), ikinci aşamaya ait büyüklükler üst indis kullanılmaksızın gösterilecektir.

Dikdörtgen şerit plağın bütün yanal kenarlarından basit mesnetle tutturulduğu, yapısındaki öngerilmenin, karşılıklı iki yanal yüzeyinden ( $x_1 = 0$  ve  $x_1 = \ell$ ) etkiyen yoğunluğu  $q$  olan düzgün yayılı normal kuvvet ile yoğunluğu  $f$  olan kendi ağırlığı etkisiyle oluştuğu kabul edilmektedir. Ayrıca, yoğunluğu  $p$  ( $p \ll q$  ve  $p \ll f$ ) olan ilave düzgün yayılı normal kuvvet plağın üst yüzeyine etki etmektedir (Şekil 1).



Şekil 1. Dairesel dolgular içeren şerit-plağa etki eden kuvvetler

Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi

$$\Omega = \Omega' \cup \Omega_L \cup \Omega_R = \{0 \leq x_1 \leq \ell, 0 \leq x_2 \leq h, -\infty \leq x_3 \leq \infty\}$$

$$\Omega' = \Omega / (\Omega_L \cup \Omega_R)$$

$$\Omega_L = \left\{ (x_1, x_2) \mid \left( x_1 - (\ell_E + R) \right)^2 + (x_2 - (h_A + R))^2 \leq R^2 \right\}$$

$$\Omega_R = \left\{ (x_1, x_2) \mid \left( x_1 - (\ell - (\ell_E + R)) \right)^2 + (x_2 - (h_A + R))^2 \leq R^2 \right\} \quad (1)$$

dir.

Birinci aşamaya ait sınır değer problemi;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0),k}}{\partial x_j} + \mathbf{f}_i &= 0; \mathbf{f}_i = \rho g \delta_2^i \\ \sigma_{11}^{(0),k} &= (\lambda_k + 2\mu_k) \varepsilon_{11}^{(0),k} + \lambda_k \varepsilon_{22}^{(0),k}; \sigma_{22}^{(0),k} = \lambda_k \varepsilon_{11}^{(0),k} + (\lambda_k + 2\mu_k) \varepsilon_{22}^{(0),k} \\ \sigma_{12}^{(0),k} &= 2\mu_k \varepsilon_{12}^{(0),k} \left( \lambda_k = \frac{\nu_k E_k}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)}, \mu_k = G_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \right) \\ \varepsilon_{ij}^{(0),k} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(0),k}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0),k}}{\partial x_i} \right), i,j;k=1,2 \\ u_2^{(0),1} \Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in [0,h]}} &= 0, \sigma_{11}^{(0),1} \Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in [0,h]}} = q \delta_1^i, \sigma_{12}^{(0),1} \Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in [0,h]}} = 0, \sigma_{12}^{(0),1} \Big|_{\substack{x_2=0;h \\ x_1 \in [0,\ell]}} = 0, \\ u_i^{(0),1} \Big|_{C_L} &= u_i^{(0),2} \Big|_{C_L}; u_i^{(0),1} \Big|_{C_R} = u_i^{(0),2} \Big|_{C_R} \\ \sigma_{ji}^{(0),1} n_j \Big|_{C_L} &= \sigma_{ji}^{(0),2} n_j \Big|_{C_L} = 0, \sigma_{ji}^{(0),1} n_j \Big|_{C_R} = \sigma_{ji}^{(0),2} n_j \Big|_{C_R} = 0, i,j;k=1,2 \end{aligned} \quad (2)$$

Burada

$$\begin{aligned} C_L &= \left\{ (x_1, x_2) \mid (x_1 - (\ell_E + R))^2 + (x_2 - (h_A + R))^2 = R^2 \right\} \\ C_R &= \left\{ (x_1, x_2) \mid (x_1 - (\ell - (\ell_E + R)))^2 + (x_2 - (h_A + R))^2 = R^2 \right\} \end{aligned}$$

dir. (2)'de üst indis k için k=1 durumu matris (k=2 durumu dolgu) malzemesine ait büyüklükleri,  $\mathbf{f}_i$  şerit-plağın ağırlık kuvveti yoğunluğunun bileşenlerini,  $\rho$  şerit plağın kütle yoğunluğunu, g yerçekimi ivmesini ve  $\delta_i^j$  Kronecker sembolünü göstermektedir.

İkinci aşamaya ait sınır değer problemi;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ji}^k + \sigma_{in}^{(0),k} \frac{\partial u_i^k}{\partial x_n} \right) &= 0 \\ \sigma_{11}^k &= (\lambda_k + 2\mu_k) \varepsilon_{11}^k + \lambda_k \varepsilon_{22}^k, \sigma_{22}^k = \lambda_k \varepsilon_{11}^k + (\lambda_k + 2\mu_k) \varepsilon_{22}^k, \sigma_{12}^k = 2\mu_k \varepsilon_{12}^k \\ \varepsilon_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right), i, j, k=1,2 \\ u_2^1 \Big|_{x_1=0;\ell} &= 0, \left( \sigma_{j1}^1 + \sigma_{1n}^{(0),1} \frac{\partial u_1^1}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{x_1=0;\ell} = 0, \left( \sigma_{ji}^1 + \sigma_{in}^{(0),1} \frac{\partial u_i^1}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{x_2=h} = p \delta_2^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left( \sigma_{ji}^{,1} + \sigma_{in}^{(0),1} \frac{\partial u_i^{,1}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad u_i^{,1} \Big|_{C_L} = u_i^{,2} \Big|_{C_L}, \quad u_i^{,1} \Big|_{C_R} = u_i^{,2} \Big|_{C_R}, \\
\left( \sigma_{ji}^{,1} + \sigma_{in}^{(0),1} \frac{\partial u_i^{,1}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{C_L} &= \left( \sigma_{ji}^{,2} + \sigma_{in}^{(0),2} \frac{\partial u_i^{,2}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{C_L} = 0, \\
\left( \sigma_{ji}^{,1} + \sigma_{in}^{(0),1} \frac{\partial u_i^{,1}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{C_R} &= \left( \sigma_{ji}^{,2} + \sigma_{in}^{(0),2} \frac{\partial u_i^{,2}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{C_R} = 0, \quad i,j;n=1,2;k=1,2. \quad (3)
\end{aligned}$$

Yukarıda verilen birinci aşamaya ait (2) sınır değer problemi ele alınan şerit-plağın karşılıklı  $x_1=0, \ell$  kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti ve kendi ağırlığı etkisinde yapıda oluşan yer değiştirme/gerilme yayılışının belirlenmesini; ikinci aşamaya ait (3) sınır değer problemi öngerilmeli (öngerilmeler  $\sigma_{ij}^{(0)}$  ile gösterilmektedir) şerit-plağın üst yüzeyine etkiyen düzgün yayılı dış kuvvet etkisinde, şerit-plağın yer değiştirme/gerilme yayılışının belirlenmesini temsil etmektedir.

Ele alınan (2) ve (3) sınır değer problemleri için Sonlu Eleman formülasyonu, göz önüne alınan dış kuvvetler ve dolayısıyla iç kuvvetler sonucunda, bu yapı elemanında biriken toplam potansiyel enerji fonksiyoneli ( $\Pi$ ) ve Ritz Tekniği yardımıyla yapılacaktır [5].

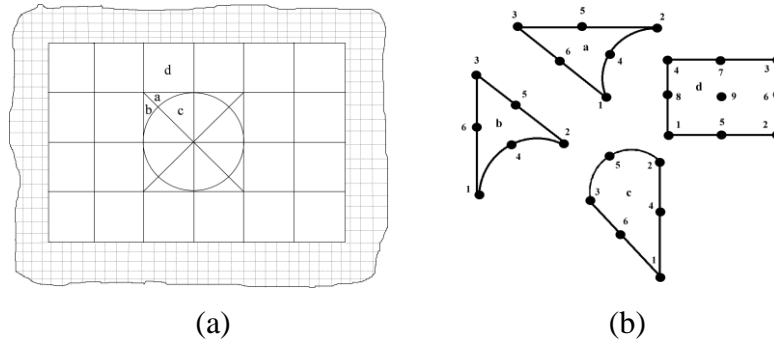
#### 1. Aşama için

$$\begin{aligned}
\Pi^{(0)} &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega'} \sigma_{ij}^{(0),1} \varepsilon_{ij}^{(0),1} dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \iint_{\Omega_L} \sigma_{ij}^{(0),2} \varepsilon_{ij}^{(0),2} dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \iint_{\Omega_R} \sigma_{ij}^{(0),2} \varepsilon_{ij}^{(0),2} dx_1 dx_2 - \\
&\quad - \iint_{\Omega'} u_2^T f dx_1 dx_2 - \int_0^h q u_1^{(0),1} \Big|_{x_1=0} dx_2 + \int_0^h q u_1^{(0),1} \Big|_{x_1=\ell} dx_2 \quad (4)
\end{aligned}$$

#### 2. aşama için,

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega'} \left( T_{ij}^{,1} \frac{\partial \bar{u}_j^{,1}}{\partial x_i} + \rho \omega^2 \bar{u}_i^{,1} \bar{u}_j^{,1} \right) dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \iint_{\Omega_L} \left( T_{ij}^{,2} \frac{\partial \bar{u}_j^{,2}}{\partial x_i} + \rho \omega^2 \bar{u}_i^{,2} \bar{u}_j^{,2} \right) dx_1 dx_2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} \iint_{\Omega_R} \left( T_{ij}^{,2} \frac{\partial \bar{u}_j^{,2}}{\partial x_i} + \rho \omega^2 \bar{u}_i^{,2} \bar{u}_j^{,2} \right) dx_1 dx_2 - \int_0^\ell p u_2^{,1} \Big|_{x_2=h} dx_1 \\
T_{ij}^{,k} &= \sigma_{ij}^{,k} + \sigma_{in}^{(0),k} \frac{\partial u_i^{,k}}{\partial x_n}, \quad i,j;n;k=1,2. \quad (5)
\end{aligned}$$

fonksiyonelleri kullanılmıştır. (5)'de  $\sigma_{in}^{(0)}$ , (2) sınır değer probleminin çözümünden belirlenen öngerilme bileşenleridir. Çözüm bölgesinin sonlu elemanlara ayrıklaştırmasında, dolgular ile dışında kalan bölge ayrı ayrı sonlu adet alt bölgeye yani, sonlu elemana ayrıklaştırılır (Şekil 2a). Bu ayrıklaştırma işleminde dairesel dolgular ve bu dolguların çevresinde 6 nodlu eğrisel üçgen sonlu elemanlar, geri kalan bölge 9 nodlu dikdörtgen sonlu elemanlar kullanılmıştır [6] (Şekil 2b).



(a)

(b)

Şekil 2. (a) Sonlu Eleman Ağı

(b) Dikdörtgen ve üçgen sonlu elemanlar ve nodların konumu

Dikdörtgen sonlu elemanların nodlarında tanımlı şekil fonksiyonları standart Lagrange şekil fonksiyonları olarak alınmış, üçgen sonlu elemanların nodlarında tanımlı şekil fonksiyonları ise  $N_i^* = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$  şeklinde seçilmiş bilinmeyen katsayılar,  $j$ . nodun koordinatı  $(x_j, y_j)$  için  $i$ . şekil fonksiyonu  $N_i^*(x_j, y_j) = \delta_{ij}$  özelliğinden belirlenmiştir ([5]). Çözüm yöntemi gereği, her bir sonlu elemanda aranan yer değiştirme fonksiyonu polinom şeklinde kabul edilir. Bu polinomlar (4) ve (5) fonksiyonlarında yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

(2) sınır değer problemi;

$$\mathbf{K}^{(0)} \mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} \quad (6)$$

cebirsel denklem sisteminin çözümüne, (3) sınır değer probleminin çözümü;

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (7)$$

cebirsel denklem sisteminin çözümüne indirgenir.  $\mathbf{K}^{(0)}$ ,  $\mathbf{K}$  Rijidlik matrisi,  $\mathbf{a}^{(0)}$ ,  $\mathbf{a}$  nodlarda bilinmeyenleri içeren vektör ve  $\mathbf{r}^{(0)}$ ,  $\mathbf{r}$  kuvvet (sağ taraf) matrisini göstermektedir ([5-7]). Önce (6), sonra (7) cebirsel denklem takımının çözülmesiyle, sırasıyla birinci aşamaya ve ikinci aşamaya ait nodlardaki yer değiştirme değerleri belirlenir. Belirtelim ki, birinci aşamaya ait gerilme değerleri ikinci aşamadaki problemin formasyonunda yani (7) cebirsel denklem takımının yapısında yer almaktadır.

Sayısal integral hesaplamaları için Gauss Karelemesi (Gauss Quadrature) metodu 10 gauss noktası kullanılarak yapılmıştır. Dairesel dolgular civarında gerilmelerin daha anlaşılır olması açısından kutupsal koordinatlardaki değerler daha elverişli olduğundan, kartezyen koordinatlardaki gerilme fonksiyonları yardımıyla, kutupsal koordinatlarda gerilme fonksiyonlarının ifadelerinden yararlanılır. Bu ifadeler;

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta + 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{r\theta} &= \sigma_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (8)$$

dir ([8]).

## SAYISAL SONUÇLAR

Sayısal sonuçların elde edilmesinde ele alınan yapı elemanını oluşturan bileşenlerin (dolgular ve onu saran malzeme) malzemesinin birbirinden farklı ve izotrop olduğu kabul edilmiştir. Matematiksel temsil olarak dolgu malzemelerine ait büyüklükler alt indis “2”, onları saran malzemeye ait büyüklükler alt indis “1” ile gösterilecektir. Buna göre, ele alınan yapının

bileşenlerinin malzemesine ait mekanik sabitler: Dolgu malzemesi (dolguları saran malzeme) için  $E_2$  ( $E_1$ ) Elastisite Modülü,  $\nu_2$  ( $\nu_1$ ) Poisson oranı,  $\lambda_2$  ( $\lambda_1$ ) Lamé sabiti ve  $\mu_2$  ( $\mu_1$ ) Kayma Modülüdür. Bu çalışmada problem ve sınır koşullarının  $x_1 = \ell/2$ 'ye göre simetrik olması özelliğinden yararlanılarak çözüm yarım bölgede yapılmıştır. Çözüm için kullanılan sonlu eleman ağı, 16 eğrisel kenara sahip üçgen sonlu eleman ve 956 dikdörtgen sonlu eleman, 4041 nod ve 8032 serbestlik derecesine sahiptir. Sonlu eleman ayrıklaştırması, pek çok sonlu eleman ağı için bulunan sayısal sonuçların literatürdeki uygun değerlere en iyi yaklaşımı sağlayan sonlu eleman ağı olarak seçilmiştir.

Elde edilen sayısal sonuçları doğrulamak için süreksizlik içermeyen ( $E_2/E_1 = 1$ ) şerit-plak ele alınmış ve sayısal sonuçlar 3 farklı durumda karşılaştırılmıştır. Bunlar:

**Durum 1:** Şerit-plağın sadece birim yoğunluğu  $f$  olan kendi ağırlığının etkisinde olması,

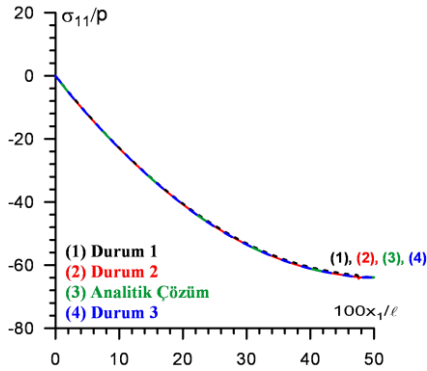
**Durum 2:** Şerit-plağın üst yüzeyinden düzgün yayılı (yoğunluğu kendi ağırlığının yoğunluğuna eşdeğer) eğilme kuvvetinin etkisinde olması,

**Durum 3:** Kendi ağırlığı etkisindeki şerit-plağın çözümlerinin, düzgün yayılı eğilme kuvvetinin etkisindeki çözümlere eşdeğer olabilmesi için çözümlerin [9]'da verildiği gibi modifiye edilmesidir.

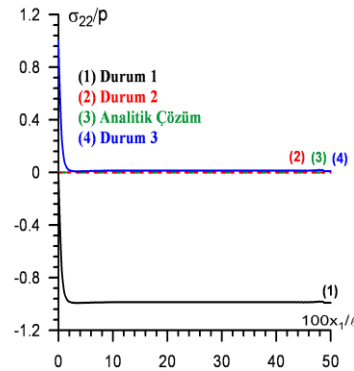
Her 3 durumda problemlerin çözümleri Sonlu Elemanlar yöntemi ile elde edilmiştir. Düzgün yayılı yüklerle yüklü şerit-plak probleminin çözümleri analitik olarak mevcuttur. Ayrıca şerit-plak düzgün yayılı yük yerine kendi ağırlığı ile yüklendiği zaman  $p = \rho gh$  konulması ve

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = \rho gy, \quad \tau_{12} = 0$$

gerilmelerin eklenmesi sureti ile sonuçlar modifiye edilebilir ([9]).



Şekil 3. Kalın şerit-plak için  $x_2 = h$ 'da  $\sigma_{11}/p$  gerilme değerlerinin karşılaştırılması.

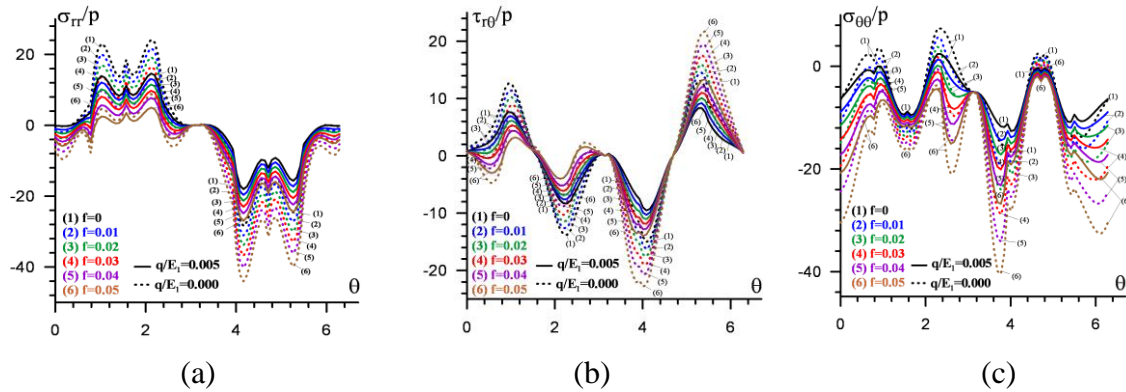


Şekil 4. Kalın şerit-plak için  $x_2 = h$ 'da  $\sigma_{22}/p$  gerilme değerlerinin karşılaştırılması.

Şekil 3 ve 4'te süreksizlik içermeyen kalın şerit-plağın üst yüzeyinde, sırasıyla  $\sigma_{11}/p$  ve  $\sigma_{22}/p$  gerilme değerlerine ait yukarıda verilen durumlar ile analitik çözüme ait uygun sayısal sonuçları göstermektedir. Şekil 3'deki grafikten şerit-plağın üst yüzeyinde  $\sigma_{11}/p$  gerilmesi değerleri için üç çözümün birbirine yakınsadığı görülmektedir. Şekil 4'deki grafikten şerit-plağın üst yüzeyinde  $\sigma_{22}/p$  gerilmesinin modifiye edilmiş değerlerinin uygun durumda birbirlerine yakınsadığı görülmektedir. Bu karşılaştırmalar tarafımızdan yapılan algoritma ve programların doğrulanmasını sağlamıştır.

Belirtelim ki, sonraki grafiklerde  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ,  $R/\ell = 0.00833$ ,  $h/\ell = 0.10$  ve  $h_U/R = 5$  alınmış ve diğer parametre değerleri şekiller üzerinde verilmiştir. Şekil 5'de dairesel ikiz

dolgu içeren şerit-plakta  $r=R$  dolgu sınırında, çekme ön gerilmesi olması ( $q/E_1 = 0.005$ ) ve olmaması ( $q/E_1 = 0$ ) durumlarında ilave yüklemekten dolayı oluşan sırasıyla (a)  $\sigma_{rr}/p$ , (b)  $\tau_{r\theta}/p$  ve (c)  $\sigma_{\theta\theta}/p$  kutupsal gerilme yığılmalarına kendi ağırlığının ( $f$ ) değişiminin etkisi verilmektedir. Grafiklerden görüldüğü gibi her iki durum için iki kenarından düzgün yayılı çekme ön gerilmesi olması ( $q/E_1 = 0.005$ ) ve olmaması ( $q/E_1 = 0$ ) durumlarında şerit-plağın kendi ağırlığının artırılması,  $\sigma_{\theta\theta}/p$  gerilme değerlerini dolguların tüm sınırında mutlak değerce arttırırken  $\sigma_{rr}/p$  ve  $\tau_{r\theta}/p$  gerilme değerlerini, ilave yüklemeye yakın olan dolguların üst sınırında ( $0-\pi$ ) mutlak değerce azaltırken, alt sınırda ( $\pi-2\pi$ ) mutlak değerce arttırmaktadır.



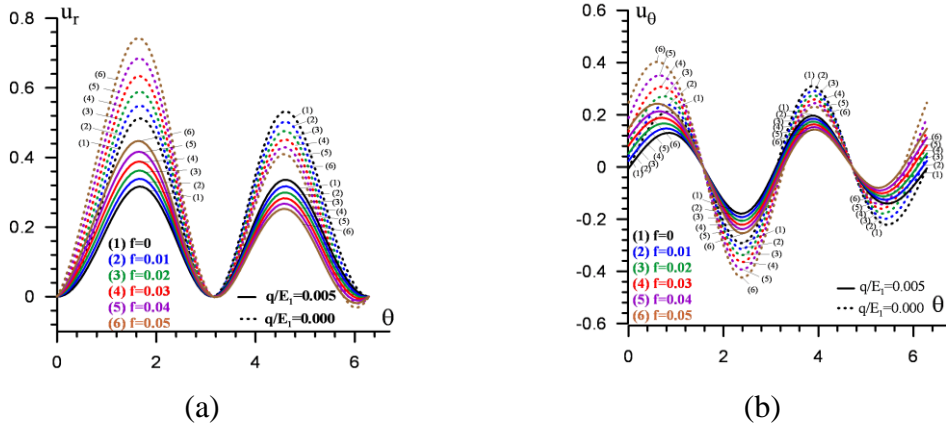
Şekil 5.  $f$  değişiminin  $E_2/E_1 = 5$  durumunda  $q/E_1 = 0$  ve  $q/E_1 = 0.005$  için dairesel dolguların  $r=R$  sınırında (a)  $\sigma_{rr}/p$ , (b)  $\tau_{r\theta}/p$  ve (c)  $\sigma_{\theta\theta}/p$  gerilme yığılmalarına etkisi.

Şekil 6’da dairesel ikiz dolgu içeren şerit-plakta  $r=R$  dolgu sınırında, çekme ön gerilmesi olması ( $q/E_1 = 0.005$ ) ve olmaması ( $q/E_1 = 0$ ) durumlarında ilave yüklemekten dolayı oluşan sırasıyla (a)  $u_r$  ve (b)  $u_\theta$  yer değişimi yayılımlarına kendi ağırlığının ( $f$ ) değişiminin etkisi verilmektedir. Grafiklerden görüldüğü gibi her iki durum için iki kenarından düzgün yayılı çekme ön gerilmesi olması ( $q/E_1 = 0.005$ ) ve olmaması ( $q/E_1 = 0$ ) durumlarında şerit-plağın kendi ağırlığının artırılması  $u_r$  ve  $u_\theta$  yer değiştirme değerlerini, ilave yüklemeye yakın olan dolguların üst sınırında ( $0-\pi$ ) mutlak değerce arttırırken, alt sınırda ( $\pi-2\pi$ ) mutlak değerce azaltmaktadır. İlave yüklemeye yakın olan dolguların üst sınırındaki ( $0-\pi$ ) yer değiştirme değerlerinin genlikleri, alt sınırda ( $\pi-2\pi$ ) yer değiştirme değerlerinden daha büyüktür.

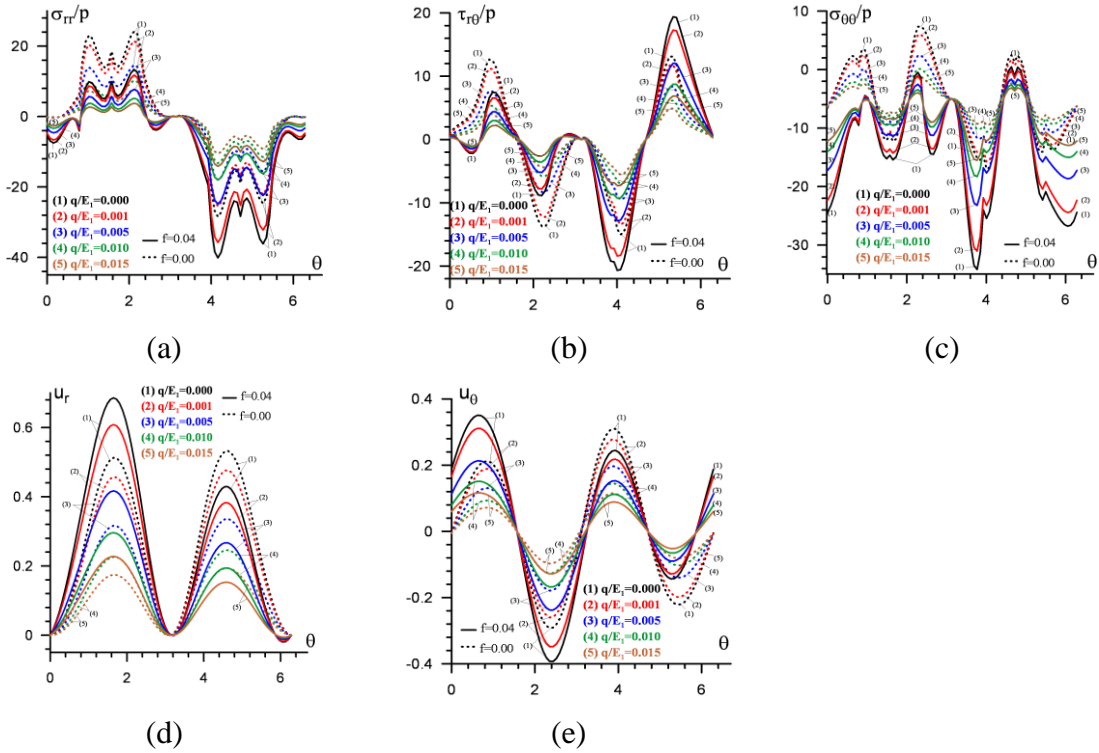
Şerit-plağın iki kenarından düzgün yayılı çekme öngerilmesi olmaması durumunda ( $q/E_1 = 0$ ), kendi ağırlığındaki değişim daha etkili olmaktadır.

Şekil 7’de dairesel ikiz dolgu içeren şerit-plağın  $f = 0; 0.04$  durumlarında  $E_2/E_1 = 5$  için iki kenarından düzgün yayılı çekme öngerilmesi değişiminin ( $q/E_1$ ), dairesel dolgular civarında  $r=R$ ’de (a)  $\sigma_{rr}/p$ , (b)  $\tau_{r\theta}/p$  ve (c)  $\sigma_{\theta\theta}/p$  gerilme yığılmalarına ve (d)  $u_r$  ve (e)  $u_\theta$  yer değiştirme yayılımlarına etkisi incelenmiştir. Grafiklerde her iki durum için ( $f = 0; 0.04$ ) düzgün yayılı çekme öngerilmesi değeri ( $q/E_1$ ) arttıkça dolgular civarındaki tüm kutupsal gerilme ve yer değiştirme yayılımlarının mutlak değerce azaldığı görülmektedir.





Şekil 6.  $f$  değişiminin  $E_2/E_1 = 5$  durumunda  $q/E_1 = 0$  ve  $q/E_1 = 0.005$  için dairesel dolgunun  $r=R$  sınırında (a)  $u_r$  ve (b)  $u_\theta$  yer değişimi yayılımlarına etkisi.



Şekil 7.  $q/E_1$  değişiminin  $f = 0$  ve  $f = 0.04$  için dairesel dolgunun  $r=R$  sınırında (a)  $\sigma_{rr}/p$ , (b)  $\tau_{r\theta}/p$  ve (c)  $\sigma_{\theta\theta}/p$  gerilme yayılımlarına (d)  $u_r$  ve (e)  $u_\theta$  yer değişimi yayılımlarına etkisi.

Çizelge 1’de dairesel ikiz dolgu içeren şerit-plağın  $q/E_1 = 0.005$  için anizotropinin artırılıp ( $E_2/E_1$ ), dairesel dolguların birbirlerine yaklaştırılması ( $c/\ell$  oranının azaltılması) durumlarında dairesel dolgular civarında belli noktalarda  $\sigma_{\theta\theta}/p$  değerleri payda şerit-plağın kendi ağırlığının dikkate alınmaması ( $f = 0$ ) ve paydada kendi ağırlığının dikkate alınmasını ( $f = 0.04$ ) gösteren oran şeklinde  $((\sigma_{\theta\theta}/p)|_{(f=0)} / (\sigma_{\theta\theta}/p)|_{(f=0.04)})$  verilmiştir. Çizelgeye göre  $E_2/E_1$  arttıkça  $\sigma_{\theta\theta}/p$  değerleri her iki durumda ( $f = 0$  ve  $f = 0.04$ )  $\theta = 0$  için mutlak değerce artarken;  $\theta = \pi/4, \pi/2$  ve  $3\pi/4$  için mutlak değerce azalmaktadır. Dolgular



birbirine yaklaştıkça ( $c/\ell$  oranı azaldıkça) dolgular arasında etkileşim başlayana kadar  $(\sigma_{\theta\theta}/p)|_{(f=0)}/(\sigma_{\theta\theta}/p)|_{(f=0.04)}$  oranı azalmaktadır.  $E_2/E_1$  ve  $c/\ell$  değerlerinin değişimleri  $\theta = \pi$ 'de etki göstermediğinden tabloda verilmemiştir. Şerit-plağın kendi ağırlığı dikkate alındığında  $E_2/E_1$  ve  $c/\ell$  değişimlerinin  $\sigma_{\theta\theta}/p$  gerilme değerine etkisi daha belirgindir.

Çizelge 1. Dairesel dolgu sınırında bazı noktalarda  $q/E_1 = 0.005$  için  $c/\ell$  ve  $E_2/E_1$  değişimlerinin  $(\sigma_{\theta\theta}/p)|_{(f=0)}/(\sigma_{\theta\theta}/p)|_{(f=0.04)}$  oranına etkisi.

$E_2/E_1$	$\theta$	$c/\ell$					
		<b>0.4709</b>	<b>0.2850</b>	<b>0.1487</b>	<b>0.0743</b>	<b>0.0247</b>	<b>0.0124</b>
<b>1</b>	<b>0</b>	$\frac{-5.5579}{-11.0575}$	$\frac{-5.5545}{-12.3083}$	$\frac{-5.5507}{-12.6586}$	$\frac{-5.5481}{-12.6096}$	$\frac{-5.5462}{-12.4830}$	$\frac{-5.5464}{-12.4468}$
		$\frac{-5.3861}{-8.7902}$	$\frac{-6.5790}{-11.7730}$	$\frac{-7.3012}{-13.1753}$	$\frac{-7.6483}{-13.6387}$	$\frac{-7.8631}{-13.8387}$	$\frac{-7.9149}{-13.8749}$
	<b><math>\pi/4</math></b>	$\frac{-11.1123}{-12.5267}$	$\frac{-12.1833}{-16.4169}$	$\frac{-12.6350}{-18.0957}$	$\frac{-12.7675}{-18.5479}$	$\frac{-12.8118}{-18.6940}$	$\frac{-12.8174}{-18.7124}$
		$\frac{-9.3101}{-10.3975}$	$\frac{-8.7776}{-12.3718}$	$\frac{-8.3287}{-13.2852}$	$\frac{-8.0584}{-13.5117}$	$\frac{-7.8670}{-13.5478}$	$\frac{-7.8175}{-13.5481}$
	<b><math>\pi/2</math></b>	$\frac{-5.6501}{-11.7436}$	$\frac{-5.6263}{-12.5305}$	$\frac{-5.6086}{-12.6146}$	$\frac{-5.5982}{-12.4317}$	$\frac{-5.5945}{-12.1866}$	$\frac{-5.5968}{-12.1301}$
		$\frac{-5.1659}{-8.7180}$	$\frac{-5.7160}{-10.2890}$	$\frac{-6.0567}{-10.9482}$	$\frac{-6.2233}{-11.1102}$	$\frac{-6.3153}{-11.1451}$	$\frac{-6.3167}{-11.2084}$
	<b><math>3\pi/4</math></b>	$\frac{-9.9609}{-10.8233}$	$\frac{-10.7947}{-13.6590}$	$\frac{-11.1410}{-14.8992}$	$\frac{-11.2398}{-15.2466}$	$\frac{-11.2813}{-15.4344}$	$\frac{-11.3064}{-15.5166}$
		$\frac{-6.3963}{-7.7505}$	$\frac{-6.0783}{-8.9427}$	$\frac{-5.8552}{-9.6776}$	$\frac{-5.7343}{-9.9487}$	$\frac{-5.6537}{-10.0352}$	$\frac{-5.6330}{-10.0579}$
<b>2</b>	<b>0</b>	$\frac{-6.3401}{-16.7361}$	$\frac{-6.3652}{-17.5226}$	$\frac{-6.3715}{-17.6257}$	$\frac{-6.3584}{-17.2357}$	$\frac{-6.3715}{-16.7906}$	$\frac{-6.4123}{-16.9951}$
		$\frac{-2.4970}{-8.7452}$	$\frac{-1.8232}{-8.5766}$	$\frac{-1.5209}{-8.3237}$	$\frac{-1.4175}{-7.9981}$	$\frac{-1.4539}{-7.7569}$	$\frac{-1.5933}{-8.2056}$
	<b><math>\pi/4</math></b>	$\frac{-8.0439}{-8.4177}$	$\frac{-8.5425}{-10.0199}$	$\frac{-8.7473}{-10.7201}$	$\frac{-8.8056}{-10.9288}$	$\frac{-8.8108}{-11.1152}$	$\frac{-8.7485}{-11.1792}$
		$\frac{0.7525}{-2.4912}$	$\frac{1.8339}{-2.2408}$	$\frac{2.2721}{-2.7645}$	$\frac{2.3949}{-3.0772}$	$\frac{2.3568}{-2.9807}$	$\frac{2.2039}{-3.1355}$
	<b><math>\pi/2</math></b>						
	<b><math>3\pi/4</math></b>						
<b>5</b>	<b>0</b>						
	<b><math>\pi/4</math></b>						
	<b><math>\pi/2</math></b>						
	<b><math>3\pi/4</math></b>						

## SONUÇLAR

Bu çalışmada eğilme etkisinde dairesel ikiz dolgu içeren öngerilmeli kompozit şerit-plağın kendi ağırlığının yer değiştirme ve gerilme yayılımına etkisi düzlem şekil değiştirme altında, Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi (LEÜBET) çerçevesinde, Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Çalışma çerçevesinde yapılan araştırmalar ile bu araştırmalarda elde edilen sonuçlar ve değerlendirmeler aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

- Şerit-plağın kendi ağırlığının ( $f$ ) artırılması, ilave yük etkisinde  $\sigma_{\theta\theta}/p$  gerilme değerlerini dolguların tüm sınırında mutlak değerce arttırırken  $\sigma_{rr}/p$  ve  $\tau_{r\theta}/p$  gerilme değerlerini, ilave yüklemeye yakın olan dolguların üst sınırında ( $0-\pi$ ) mutlak değerce azaltırken, alt sınırdaki ( $\pi-2\pi$ ) mutlak değerce arttırmaktadır.

- Şerit-plağın kendi ağırlığının ( $\mathbf{f}$ ) artırılması, ilave yük etkisinde  $u_r$  ve  $u_\theta$  yer değiştirme değerlerini, ilave yüklemeye yakın olan dolguların üst sınırında ( $0-\pi$ ) mutlak değerce arttırırken, alt sınırdaki ( $\pi-2\pi$ ) mutlak değerce azaltmaktadır. İlave yüklemeye yakın olan dolguların üst sınırındaki ( $0-\pi$ ) yer değiştirme değerlerinin genlikleri, alt sınırdaki ( $\pi-2\pi$ ) yer değiştirme değerlerinden daha büyüktür.
- Şerit-plağın hem kendi ağırlığının ihmal edilmesi ( $\mathbf{f}=0$ ) ve hem de kendi ağırlığı etkisinde ( $\mathbf{f}=0.04$ ) olması durumlarında düzgün yayılı çekme öngerilmesi değeri ( $q/E_1$ ) arttıkça, ilave yük etkisinde dairesel dolgular civarında, tüm kutupsal gerilme ve yer değiştirme yayılımlarının mutlak değerce azaldığı görülmektedir.  $q/E_1$  arttıkça  $\mathbf{f}=0$  ve  $\mathbf{f}=0.04$  olması durumundaki dağılımlar arasındaki fark azalmaktadır.
- Şerit-plağın kendi ağırlığı dikkate alındığı durumda  $E_2/E_1$  ve  $c/\ell$  değişimlerinin  $\sigma_{\theta\theta}/p$  gerilme değerine etkisi diğer gerilme bileşenlerine göre daha belirgindir.

### TEŞEKKÜR

Bu çalışmamızın gerçekleştirilmesinde ilgi, yönlendirme, tavsiye ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV' a sonsuz teşekkür ederiz.

### KAYNAKLAR

- [1] H. Takabatake, Effects of dead loads in static beams, *J.Struct.Eng.-ASCE*. 116 (4) (1990) 1102-1120. doi:10.1061/(ASCE)0733-9445(1990)116:4(1102).
- [2] H. Takabatake, Effects of dead loads on the static analysis of plates, *Struct. Eng. and Mech.* 42 (6) (2012) 761-781. doi: 10.12989/sem.2012.42.6.761.
- [3] S. J. Zhou, Load-induced stiffness matrix of plates, *Can. J. Civil. Eng.* 29 (1) (2002) 181-184. doi: 10.1139/101-064.
- [4] U. Babuscu Yesil, The Effect of Own Weight On The Static Analysis of A Prestretched Plate-Strip With A Circular Hole In Bending, *Mechanics Of Composite Materials*, 53(2), (2017) 243-252. doi:10.1007/s11029-017-9657-9.
- [5] A. N. Guz, *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [6] O.C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite Element Methods: Basic Formulation and Linear Problems, Vol. 1, 4<sup>th</sup> Ed.*, Mc Graw-Hill Book Company, Oxford, 1989.
- [7] S. D. Akbarov, *Stability Loss and Buckling Delamination: Three-Dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites*, Springer-Heidelberg, New York, 2013.
- [8] U. Babuscu Yesil, Forced Vibration Analysis Of Pre-stretched Plates With Twin Circular Inclusions, *J. Eng. Mech.*, 141 (1) (2015) 04014099-1-04014099-16. doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000809.
- [9] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity, Third Edition*, McGraw-Hill International Editions, London, 1970.